نام و نام خانوادگی:

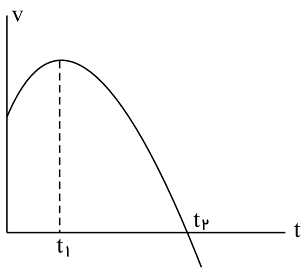
نام آزمون: آزمون حرکت شناسی

علیرضا ایدل خانی

۱ - متحرکی روی محور x در حال حرکت است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 10s$ در SI برابر $-4\vec{i}$ و در بازهٔ زمانی $t_2 = 10s$ تا $t_3 = 12s$ برابر $2\vec{i}$ است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_3 = 12s$ در SI، کدام است؟

① $-\frac{2}{7}\vec{i}$ ② $-\frac{16}{7}\vec{i}$ ③ $4\vec{i}$ ④ $8\vec{i}$

۲ - نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر قسمتی از یک سهمی است. کدام مورد درست است؟



① در بازهٔ صفر تا t_1 تندی در حال کاهش است.

② بزرگی شتاب در لحظهٔ صفر و t_2 برابر است.

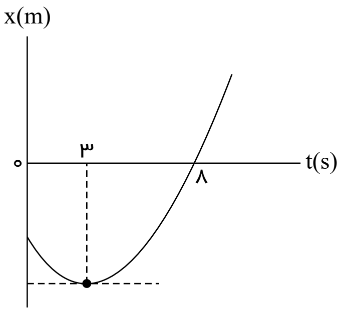
③ در بازهٔ صفر تا t_2 شتاب خلاف جهت محور x است.

④ بزرگی شتاب متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 بیشتر از بزرگی شتاب متوسط در بازهٔ صفر تا t_2 است.

۳ - متحرکی روی محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند. اگر سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 0$ در جهت محور x باشد و بردار سرعت متوسط در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت برابر $v_{av} = (7/5\frac{m}{s})\vec{i}$ و تندی متوسط در این بازه $8/5\frac{m}{s}$ باشد، مسافت طی‌شده در ۲ ثانیهٔ اول حرکت چند متر است؟

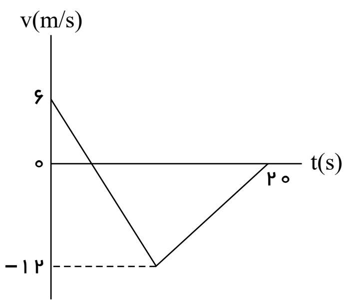
① ۵ ② ۱۵ ③ ۲۵ ④ ۳۵

۴ - نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 8s$ چند برابر مسافت طی‌شده در این بازهٔ زمانی است؟



① $\frac{5}{17}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{8}{17}$ ④ $\frac{9}{14}$

۵ - شکل زیر، نمودار سرعت - زمان متحرکی است که روی محور x حرکت می‌کند. تندی متوسط متحرک در مدتی که در خلاف جهت محور حرکت می‌کند، چند متر بر ثانیه است؟



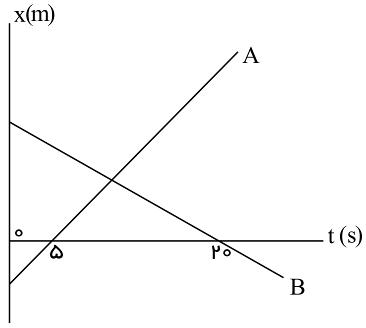
① صفر

② ۶

③ ۸

④ ۹

۶- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B مطابق شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t=۰$ فاصلهٔ دو متحرک ۱۵۰ متر باشد و تندی متحرک A، ۲ برابر تندی متحرک B باشد، فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t=۲۰s$ چند متر است؟

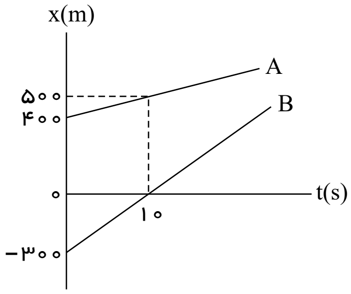


① ۵۰
② ۱۰۰
③ ۱۵۰
④ ۲۰۰

۷- متحرکی روی محور x در حال حرکت است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_۱=۰s$ تا $t_۲=۱۰s$ در SI برابر $-۲\vec{i}$ و در بازهٔ زمانی $t_۱=۰s$ تا $t_۳=۱۵s$ برابر $\frac{۲}{۳}\vec{i}$ است. بردار شتاب آن در بازهٔ زمانی $t_۲=۱۰s$ تا $t_۳=۱۵s$ در SI، کدام است؟

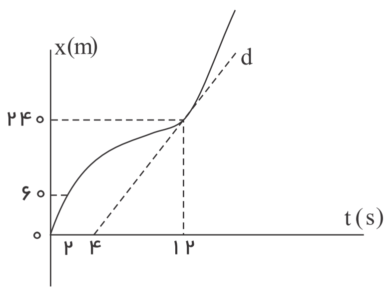
① $۲\vec{i}$
② $۴\vec{i}$
③ $۶\vec{i}$
④ $\frac{۴۲}{۳}\vec{i}$

۸- نمودار مکان - زمان دو خودرو که روی خط راست حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر، است. در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲ > t_۱$ فاصلهٔ دو متحرک از هم $۶۰۰m$ است. $\frac{t_۲}{t_۱}$ کدام است؟



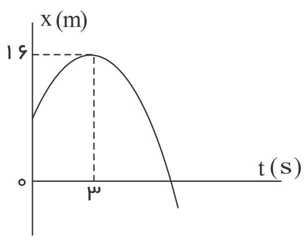
① ۱۵
② ۱۳
③ ۸
④ ۵

۹- نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل زیر است. اگر تندی در لحظهٔ $t=۱۲s$ برابر تندی متوسط در بازهٔ $t_۱=۲s$ تا $t_۲=۱۴s$ باشد، سرعت متوسط ۲ ثانیه اول چند برابر سرعت متوسط ۲ ثانیهٔ هفتم است؟ (خط d مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=۱۲s$ است.)



① $\frac{۱}{۳}$
② $\frac{۱}{۲}$
③ $\frac{۳}{۵}$
④ $\frac{۲}{۳}$

۱۰- نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در بازهٔ زمانی $t_۱=۰s$ تا $t_۲=۶s$ تندی متوسط متحرک برابر $۳\frac{m}{s}$ باشد، چند ثانیه بردار مکان متحرک در جهت محور x است؟

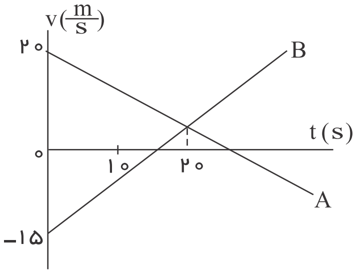


① ۹
② ۸
③ ۷
④ ۳

۱۱- اتومبیلی با تندی ثابت در یک مسیر مستقیم در حال حرکت است. راننده با شتاب ثابت ترمز می‌کند و پس از طی مسافت ۱۵۰ متر، تندی اتومبیل نصف می‌شود. اتومبیل از لحظه ترمز تا توقف کامل چند متر را طی می‌کند؟

(۱) ۱۷۵ (۲) ۲۰۰ (۳) ۲۵۰ (۴) ۳۰۰

۱۲- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. مجموع مسافتی که دو متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = ۰s$ تا $t_2 = ۱۰s$ طی می‌کنند، چند متر است؟



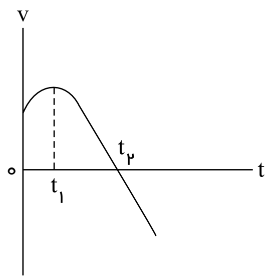
(۱) ۳۵۰
(۲) ۲۶۲٫۵
(۳) ۲۵۰
(۴) ۱۲۵٫۵

۱۳- نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. کدام موارد زیر درست است؟ الف- جهت سرعت و شتاب در لحظهٔ t_1 تغییر کرده است.

ب - در بازهٔ t_1 تا t_2 حرکت در جهت محور x است.

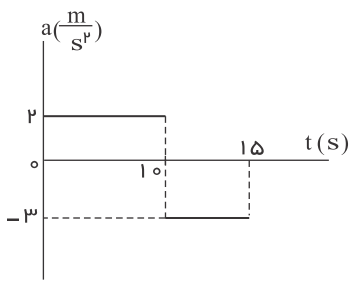
پ- در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 تندی در حال کاهش است.

ت- بردار شتاب در بازهٔ زمانی صفر تا t_2 خلاف جهت محور x است.



(۱) ب (۲) پ
(۳) الف و ت (۴) ب و ت

۱۴- نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t = ۳s$ سرعت متحرک، $\vec{v} = (۱\frac{m}{s})\vec{i}$ باشد، سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = ۷s$ تا $t_2 = ۱۰s$ چند متر بر ثانیه است؟

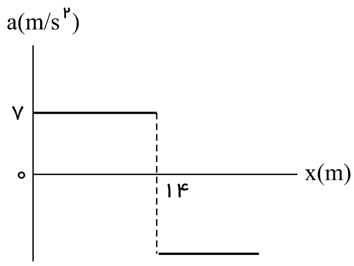


(۱) ۶
(۲) ۹
(۳) ۱۲
(۴) ۱۵

۱۵- متحرکی روی مسیر مستقیمی حرکت با شتاب دارد. اگر سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = ۵٫۵s$ تا $t_2 = ۱۲٫۵s$ برابر صفر باشد، معادلهٔ حرکت این متحرک مطابق کدام گزینه می‌تواند باشد؟

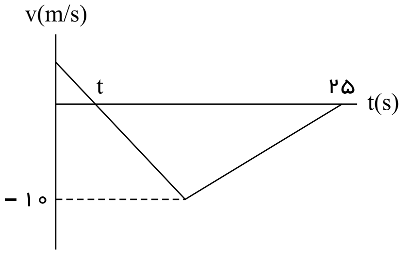
(۱) $x = ۱٫۵t^۲ + ۱۳٫۵t + ۱۰$ (۲) $x = t^۲ + ۹t - ۸$ (۳) $x = t^۲ - ۸t + ۶$ (۴) $x = ۰٫۵t^۲ - ۹t + ۴$

۱۶- متحرکی از حال سکون و از مبدأ مکان در راستای محور x شروع به حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که به مکان m می‌رسد، شتاب آن تغییر کرده و تا توقف کامل به حرکت خودش ادامه می‌دهد، اگر نمودار شتاب مکان این حرکت مطابق شکل زیر باشد، بزرگی سرعت متوسط متحرک را در کل مدت زمان حرکت برحسب متر بر ثانیه به‌دست آورید.



(۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷

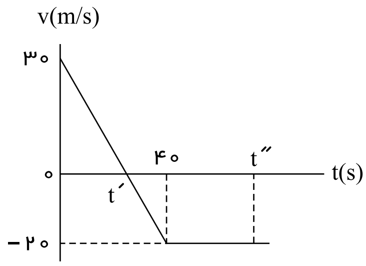
۱۷ – نمودار سرعت–زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل است. بزرگی سرعت متوسط متحرک در بازهٔ t تا ۲۵s چند واحد SI است؟



① ۱۰ ② ۵

③ ۷ ④ ۱۵

۱۸ – نمودار سرعت زمان متحرکی مطابق شکل زیر است. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه متحرک به مکان اولیه‌اش بازخواهد گشت؟



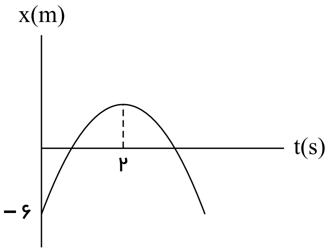
① ۱۰

② ۵۰

③ ۱۰۰

④ ۲۰

۱۹ – نمودار مکان–زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق سهمی شکل زیر است. اگر متحرک در بین لحظاتی که از مبدأ می‌گذرد، مسافت ۴m را بپیماید، معادلهٔ سرعت–زمان متحرک مطابق کدام گزینه است؟ (همهٔ معادلات دستگاه SI هستند.)



① $v = -۴t + ۸$ ② $v = ۴t - ۶$

③ $v = ۴t + ۸$ ④ $v = -۴t - ۶$

۲۰ – متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می کند. اگر سرعت اولیه متحرک $v_\circ = ۱۰\frac{m}{s}$ و مسافت پیموده شده توسط آن در دو ثانیهٔ دوم برابر ۴۸m باشد، سرعت متوسط متحرک در مدت سه ثانیهٔ سوم چند متر بر ثانیه است؟

① ۴۵ ② ۵۰ ③ ۵۵ ④ ۶۰

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲

$$(a_{av})_{۵s-۱۰s}=\frac{v_{۱۰}-v_{۵}}{۱۰s-۵s}=-۴\Rightarrow v_{۱۰}-v_{۵}=-۲۰\frac{m}{s}\quad(۱)$$

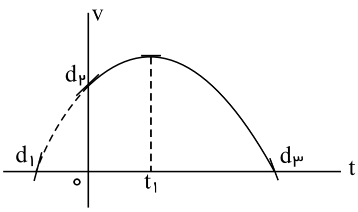
$$(a_{av})_{۱۰s-۱۲s}=\frac{v_{۱۲}-v_{۱۰}}{۱۲s-۱۰s}=۲\Rightarrow v_{۱۲}-v_{۱۰}=۴\frac{m}{s}\quad(۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲)\Rightarrow(v_{۱۲}-v_{۱۰})+(v_{۱۰}-v_{۵})=۴+(-۲۰)\Rightarrow v_{۱۲}-v_{۵}=-۱۶\Rightarrow(a_{av})_{۵s-۱۲s}=\frac{v_{۱۲s}-v_{۵s}}{۱۲s-۵s}=-\frac{۱۶}{۷}\frac{m}{s^{۲}}\Rightarrow(a_{av})_{۵s-۱۲s}=-\frac{۱۶}{۷}\vec{i}$$

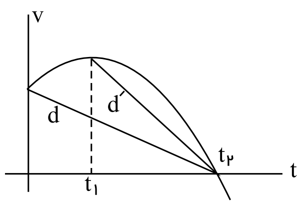
چون $\overrightarrow{a_{av}}$ها و $\vec{v}$ها همگی در امتداد محور x بودند.

۲ ـ گزینه ۴ • در بازهٔ صفر تا : اولاً تندی پیوسته مثبت است یعنی متحرک تغییر جهت نمی دهد. پس تندی و سرعت هم مفهوم هستند. در بازهٔ صفر تا $t_۱$ چون مقدار v افزایش یافته بنابراین تندی هم افزایش می‌یابد (پس گزینهٔ ۱ نادرست است).

• شیب خط مماس بر نمودار $(v-t)$ برابر شتاب متحرک است بنابراین شتاب در $t=۰$ و $t=t_۲$ چون شیب خطوط مماس برابر نیست، نمی‌تواند برابر باشند:[شیب $d_۱$ با $d_۳$ هم‌اندازه هستند ولی شیب $d_۳$ با $d_۲$ نمی‌تواند برابر باشد.] (پس گزینهٔ ۲ هم نادرست است.)



• مشابه نکتهٔ قبل، کافی است شیب خطوط مماس بر نمودار $(v-t)$ را در نظر بگیریم. از صفر تا $t_۱$، شیب خطوط مماس، مثبت و از $t_۱$ تا $t_۲$، شیب خطوط مماس منفی است. (پس گزینهٔ ۳ هم نادرست است.)



• برای مقایسهٔ شتاب متوسط بین بازه‌های زمانی مختلف کافی است شیب خطوط واصل بین آن‌ها را با هم مقایسه نماییم.

بزرگی شیب خط‌های واصل d و d' را با هم مقایسه کنیم. هرچه خطوط به خط عمود فرضی بر محور t نزدیک و متمایل‌تر باشند، مقدار شیب آن‌ها بیشتر است. یعنی بزرگی شیب d' از بزرگی شیب d بیشتر است. بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

۳ ـ گزینه ۴ سرعت در $t=۰$، در جهت محور x است (دقت کنید در جهت محور x بودن الزاماً به مفهوم $x>۰$ بودن نیست بلکه یعنی جهت سرعت متحرک در جهت $(+)$ محور x است درحالی که ممکن است $x<۰$ باشد.) پس $v_۰>۰$.

به کمک سرعت متوسط در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت جابه‌جایی متحرک را می‌یابیم:

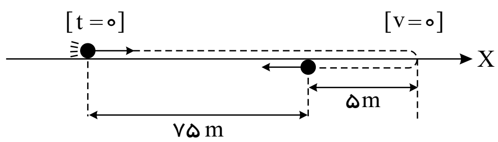
$$\overrightarrow{v_{av}}=\frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t}=۷/۵\vec{i}\Rightarrow(\frac{\Delta x}{\Delta t})\vec{i}=۷/۵\vec{i}$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta x}{\Delta t}=۷/۵\Rightarrow\Delta x=۷/۵\times۱۰=۷۵m\quad(۱)$$

تندی متوسط متحرک در همین مدت $۸/۵\frac{m}{s}$ شده است، از اینکه تندی متوسط متحرک بیشتر از سرعت متوسط متحرک شده است، درمی‌یابیم که الزاماً متحرک تغییر جهت داده است. یعنی مسافت طی شده بیشتر از جابه‌جایی است.

$$S_{av}=\frac{L}{\Delta t}=\frac{L}{۱۰}=۸/۵\Rightarrow L=۸۵m\quad(۲)$$

با توجه به مقادیر (۱) و (۲):



حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. نمودار $(v-t)$ یک خط مایل است با $v_۰>۰$

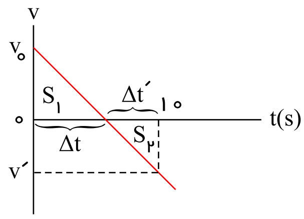
$(۱)\,,\ (۲) \Rightarrow S_۱ = ۸۰m\,,\ S_۱ + |S_۲| = ۸۵m \Rightarrow |S_۲| = ۵m$

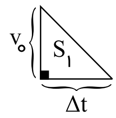
$$\frac{|v'|}{v_\circ} = \frac{\Delta t'}{\Delta t}\,,\ \begin{cases} S_۱ = \frac{۱}{۲} v_\circ \Delta t = ۸۰ \\ S_۲ = \frac{۱}{۲}|v'|\Delta t' = ۵ \end{cases}$$

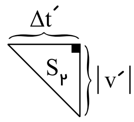
$$\Rightarrow \frac{|v'|}{|v|} \times \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{۵}{۸۰} = \frac{۱}{۱۶} \quad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۳)} \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^۲ = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{۱}{۴}\ \ \frac{\Delta t'}{۱۰ - \Delta t'} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \Delta t' = ۲s \Rightarrow \Delta t = ۸s$$



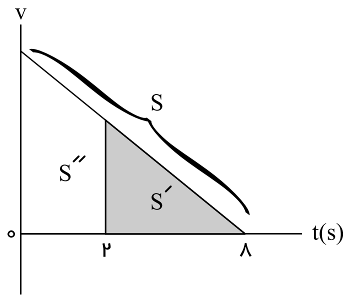




$\Rightarrow S' = ?$

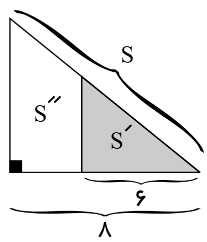
$\Rightarrow S''_{(\circ - ۲s)} = \Delta x = L = ?$

$\Rightarrow S_۱ = ۸۰m$



$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \left(\frac{۶}{۸}\right)^۲ = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow \frac{S'}{۸۰} = \frac{۹}{۱۶}$$

$\Rightarrow S' = ۴۵ \Rightarrow$ مجهول سؤال $= S - S' = ۸۰ - ۴۵ = ۳۵m$



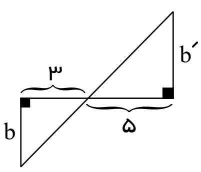
توجه: می‌توان پس از مشخص شدن $\Delta t = ۸s$، از روش زیر بهره برد به‌نحوی‌که: در بازهٔ زمانی $(\circ - ۸s)$ و $(۲s - ۸s)$، به مسئله وارونه نگاه کنیم تا $v_\circ = \circ$ شود. آنگاه:

$$(\circ \to ۸s) \to (۸s \to \circ) \Rightarrow \begin{cases} v_\circ = v_{(t=۸s)} = \circ \\ |\Delta x| = \frac{۱}{۲} a \Delta t^۲ \Rightarrow ۸۰ = \frac{۱}{۲}|a| \times ۸^۲ \Rightarrow |a| = ۲{,}۵\frac{m}{s^۲} \end{cases}$$

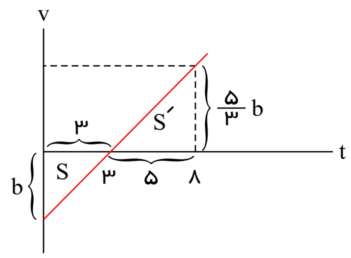
$$(۲s \to ۸s) \to (۸s \to ۲s) \begin{cases} v_\circ = v_{(t=۸s)} = \circ \\ |\Delta x| = \frac{۱}{۲} a \Delta t^۲ = \frac{۱}{۲}(۲{,}۵)۶^۲ = ۴۵m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجهول تست $= S - S' = ۸۰ - ۴۵ = ۳۵m$

۴ - گزینه ۳ ساده‌ترین راه، رسم نمودار $(v - t)$ و استفاده از مساحت زیر نمودار آن‌هاست:



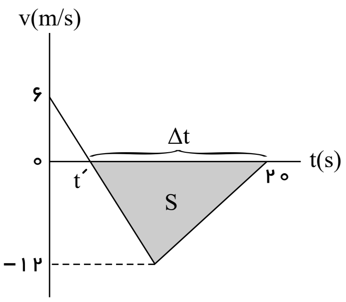
$$\Rightarrow \frac{b'}{b} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow b' = \frac{۵}{۳} b$$



$$|S| = \frac{۱}{۲}(۳)(b) = \frac{۳b}{۲}$$
$$S' = \frac{۱}{۲}(\frac{۵}{۳}b)(۵) = \frac{۲۵}{۶}b$$
$$\Delta x = S' - |S| = \frac{۸}{۳}b$$
$$L = S' + |S| = \frac{۳۴}{۶}b$$
$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{\frac{۸}{۳}b}{\frac{۳۴}{۶}b} = \frac{۸}{۱۷}$$

۵ – گزینه ۲

هنگامی که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، $v > ۰$ است و وقتی در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، $v < ۰$ است. پس در بازهٔ زمانی صفر تا t'، چون $v > ۰$ است متحرک در جهت محور x و در بازهٔ زمانی t' تا $t = ۲۰s$ چون $v < ۰$ است متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

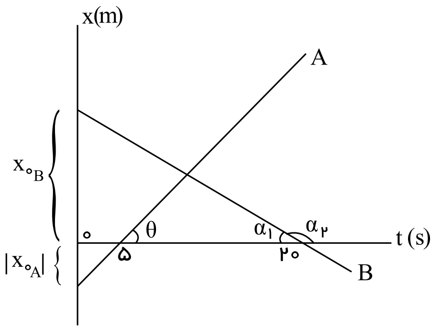


در بازهٔ زمانی t' تا $t = ۲۰s$:

$$L = (S) = \frac{۱}{۲}(۱۲)(\Delta t)$$
$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{۶\Delta t}{\Delta t} = ۶\frac{m}{s}$$

توجه: نکته مهم این بود که نیازی به یافتن t' نبود. این سؤال در سال‌های اخیر مورد توجه طراحان بوده است.

۶ – گزینه ۳ ابتدا رابطهٔ بین x_{OB} و x_{OA} را محاسبه می‌کنیم، سپس مقدار هریک را تعیین می‌کنیم.



$$x_{\circ B} + |x_{\circ A}| = ۱۵۰m \quad (۱)$$
$$\begin{cases} v_A > ۰ \\ v_B < ۰ \end{cases} \xrightarrow{(A \text{ تندی }) = ۲ (B \text{ تندی })} v_A = ۲|v_B|$$

می‌دانیم شیب خطوط مماس بر نمودار مکان–زمان برابر سرعت لحظه‌ای است و اگر نمودار یک خط مایل باشد، خود شیب این خط برابر سرعت لحظه‌ای آن متحرک است.

$$\begin{cases} v_A = A \text{ تندی } = \frac{|x_{\circ A}|}{۵} \quad (۲) \\ |v_B| = \frac{x_{\circ B}}{۲۰} \quad (۳) \end{cases} \xrightarrow{v_A = ۲|v_B|} \frac{|x_{\circ A}|}{۵} = ۲\frac{x_{\circ B}}{۲۰} = \frac{x_{\circ B}}{۱۰} \Rightarrow |x_{\circ A}| = \frac{x_{\circ B}}{۲} \Rightarrow x_{\circ B} = ۲|x_{\circ A}| \xrightarrow{(۱)} \begin{cases} |x_{\circ A}| = ۵۰ \Rightarrow x_{\circ A} = -۵۰m \\ x_{\circ B} = ۱۰۰m \end{cases}$$

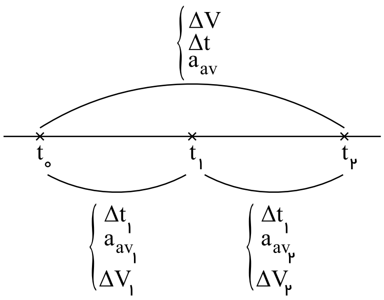
$$(۲) \Rightarrow v_A = \frac{۵۰}{۵} = ۱۰\frac{m}{s} \;,\; (۳) \Rightarrow v_B = -\frac{۱۰۰}{۲۰} = -۵\frac{m}{s}$$

در نهایت معادلات مکان–زمان دو متحرک را می‌نویسیم و فاصله دو متحرک را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x_A = v_A t + x_{\circ A} \\ x_B = v_B t + x_{\circ B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۱۰t - ۵۰ \\ x_B = -۵t + ۱۰۰ \end{cases} \Rightarrow x_A - x_B = ۱۵t - ۱۵۰ \Rightarrow x_A - x_B = ۱۵ \times ۲۰ - ۱۵۰ = ۱۵۰m \Rightarrow x_A - x_B = ۱۵۰m$$

۷ - گزینه ۳

به طور کلی در حرکت در امتداد محور x داریم:



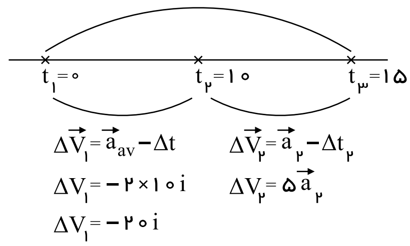
$$\Delta V = \Delta V_۱ + \Delta V_۲$$

در اینجا:

$$\Delta \vec{V} = \vec{a} \times \Delta t = \frac{۲}{۳} \times ۱۵i = \Delta \vec{V} = ۱۰\vec{i}$$

$$\Delta V_۱ = \overrightarrow{a_{av}} \times \Delta t = -۲ \times ۱۰i \rightarrow \Delta V_۱ = -۲۰\vec{i}$$

$$\Delta V_۲ = \overrightarrow{a_۲} \times \Delta t_۲ = -۲ \rightarrow \Delta V_۲ = -۲۰\overrightarrow{a_۲}$$



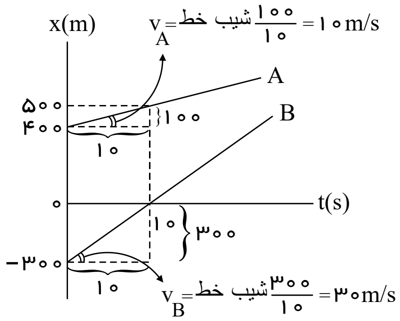
$$\Delta \vec{V} = \Delta \vec{V} \rightarrow ۱۰\vec{i} = -۲۰\vec{i} + ۵\overrightarrow{a_۲} \rightarrow \overrightarrow{a_۲} = ۶\vec{i}$$

۸ - گزینه ۲ در ابتدا معادلهٔ حرکت هر یک را می‌نویسیم:

$$x = vt + x_۰ \rightarrow \begin{cases} x_A = ۱۰t + ۴۰۰ \\ x_B = ۳۰t - ۳۰۰ \end{cases}$$

$$V_B = \text{شیب خط} = \frac{۳۰۰}{۱۰} = ۳۰\frac{m}{s}$$

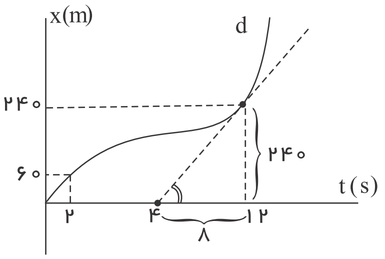
این دو متحرک، دو بار در فاصلهٔ ۶۰۰ متری هم قرار می‌گیرند. یک بار قبل از اینکه به هم برسند و بار دیگر بعد از اینکه به هم رسیده و دوباره از هم دور شوند یعنی:



$$|\Delta x| = |x_A - x_B| = |(۱۰t + ۴۰۰) - (۳۰t - ۳۰۰)| = -۲۰t + ۷۰۰ \rightarrow \begin{cases} x_A - x_B = ۶۰۰ = -۲۰t + ۷۰۰ \rightarrow t_۱ = ۵s \\ x_A - x_B = -۶۰۰ = -۲۰t + ۷۰۰ \rightarrow t_۲ = ۶۵s \end{cases} \rightarrow \frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۶۵}{۵} = ۱۳$$

۹ ـ گزینه ۱

ابتدا مکان متحرک را در لحظهٔ $t_۲ = ۱۴s$ می‌یابیم. می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ برابر سرعت لحظه‌ای متحرک است، بنابراین داریم:



$V_{t=۱۲} = $ شیب خط مماس بر $x - t = \frac{۲۴۰}{۸} = ۳۰\frac{m}{s}$

از طرفی مطابق فرض سؤال داریم:

$$V_{t=۱۲} = V_{av(۲-۱۴)} \to ۳۰ = \frac{x_{۱۴} - x_۲}{۱۴ - ۲} \xrightarrow{x_۲=۶۰m} x_۴ - ۶۰ = ۳۶۰ \to x_۴ = ۴۲۰m$$

در نهایت داریم:

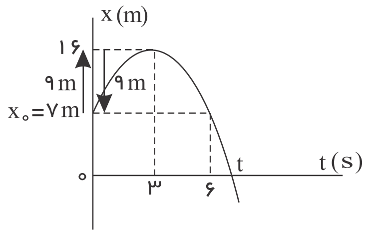
دو ثانیه اول $V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۶۰-۲}{۲} = ۳۰\frac{m}{s}$

دو ثانیه هفتم $V'_{av} = \frac{x_{۱۴}-x_{۱۲}}{۱۴-۱۲} = \frac{۶۰-۲}{۲} = \frac{۴۲۰-۲۴۰}{۲} = ۹۰\frac{m}{s}$

$\to \frac{V_{av}}{V'_{av}} = \frac{۳۰}{۹۰} = \frac{۱}{۳}$

۱۰ ـ گزینه ۳

چون حرکت با شتاب ثابت است، نمودار $x-t$ به صورت قسمتی از یک سهمی است و با توجه به وجود تقارن نسبت به راس سهمی داریم:



$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \to ۳ = \frac{\ell}{۶} \to \ell = ۱۸m$$

یعنی در ۳ ثانیه اول ۹ متر در جهت محور رفته و در ۳ ثانیه بعد ۹ متر را برگشته است.

حال در ۳ ثانیه اول، از راس سهمی که $v = ۰$ است، برمی‌گردیم: (در این ۳ ثانیه ۹ متر برمی‌گردیم.)

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \to -۹ = \frac{۱}{۲} \times a \times (۳)^۲ \to a = -۲\frac{m}{s^۲}$$

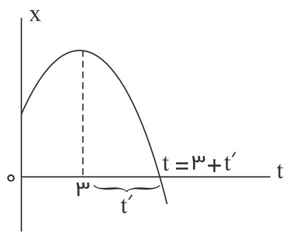
و برای تعیین زمان حرکت از $x = ۱۶$ تا $x = ۰$ (از لحظهٔ مربوط به راس سهمی تا لحظهٔ $x = ۰$) داریم: (در راس سهمی $v = ۰$ است)

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}a't^۲ \to -۱۶ = \frac{۱}{۲}(-۲)t'^۲ \to t' = ۴s$$

پس در نهایت:

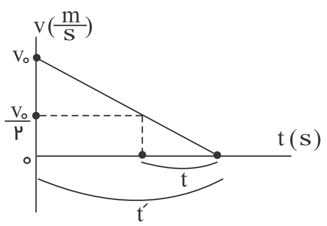
$$t = ۳ + t' = ۳ + ۴ \to t = ۷s$$

یعنی در مدت ۷ ثانیهٔ اول $x > ۰$ یعنی بردار مکان در جهت محور x است.



۱۱ - گزینه ۲

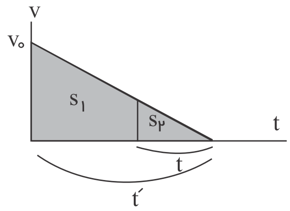
اگر نمودار سرعت - زمان متحرک را از لحظهٔ ترمز (شروع حرکت کندشونده) تا توقف رسم کنیم، داریم:



با توجه به تشابه مثلث‌ها:

$$\frac{t'}{t} = \frac{v_۰}{\frac{v_۰}{۲}} = ۲$$

از طرفی می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه، معادل مجذور نسبت تشابه به آن‌هاست یعنی:



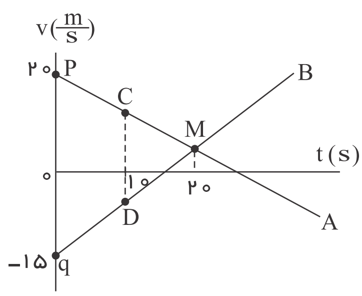
$$\text{مساحت مثلث بزرگ}\frac{(S_۲ + S_۱)}{S_۱} = (\frac{t'}{t})^۲ = ۲^۲ = ۴$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$S_۲ = \Delta x = ۱۵۰m \xrightarrow[S_۱ \Delta x_۱]{S_۲ = ۳S_۱} ۱۵۰ = ۳\Delta x' = ۵۰m$$
$$\Delta x_{\text{کل}} = ۱۵۰ + ۵۰ \rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = ۲۰۰m$$

۱۲ - گزینه ۲

ابتدا با استفاده از تشابه مثلث‌ها، اختلاف سرعت دو متحرک در لحظهٔ $t = ۱۰s$ را می‌یابیم.



$$\overset{\Delta}{MCD} \sim \overset{\Delta}{MPQ} \rightarrow \frac{CD}{۳۵} = \frac{۱۰}{۲۰} \rightarrow CD = ۱۷/۵$$

حال مسافت ذوزنقهٔ هاشور زده، معادل مجموع مسافت طی شده توسط این دو متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول است، یعنی:

$$\ell_A + \ell_B = S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۳۵ + ۱۷/۵}{۲} \times ۱۰ \rightarrow \ell_A + \ell_B = ۲۶۲/۵m$$

۱۳ - گزینه ۱ فقط گزینهٔ «ب» درست است، زیرا در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$، سرعت مثبت است یعنی متحرک در جهت محور حرکت کرده.

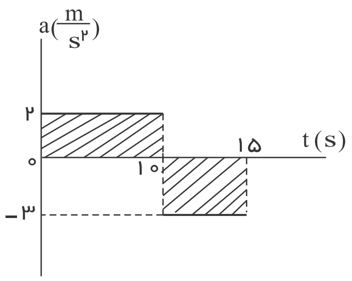
گزینهٔ الف غلط است چون در لحظهٔ $t_۱$ فقط جهت شتاب تغییر کرده

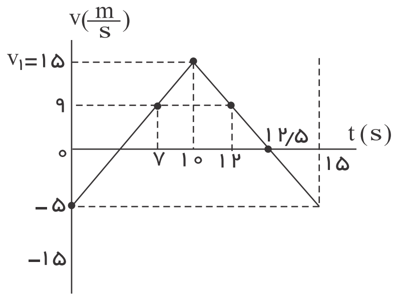
گزینهٔ پ غلط است چون در بازهٔ صفر تا $t_۱$ تندی در حال افزایش است.

گزینهٔ ت غلط است چون در بازهٔ صفر تا $t_۲$ در ابتدا شتاب مثبت (در جهت محور) سپس منفی است (در خلاف جهت محور)، (دقت کنید که شیب خط مماس بر $v - t$ همان شتاب متحرک است.)

۱۴ - گزینه ۳

در ابتدا از روی نمودار $a-t$ داده شده نمودار $v-t$ را رسم کرده، سپس با تعیین جابه‌جایی (سطح محصور بین نمودار $v-t$ و محور زمان)، سرعت متوسط را می‌یابیم. قبل از هر چیزی داریم:





$$V = at + v_0 \xrightarrow{\text{در سه ثانیه اول}} 1 = 2 \times 3 + v_0 \to v_0 = -5\frac{m}{s}$$
$$\Delta V_1 = 20 = v_1 - v_0 = v_1 - (-5) \to v_1 = 15\frac{m}{s}$$
$$\Delta V_2 = -30 = v_2 - v_1 = v_2 - (15) \to v_2 = -15\frac{m}{s}$$
$$t_1 = 7s \text{ در } : v = at + v_0 \to v = 2 \times 7 - 5 \to v = 9\frac{m}{s}$$
$$t_2 = 12s \text{ در } : v' = a't' + v'_0 \to v' = -3 \times 2 + 15 \to v' = 9\frac{m}{s}$$
$$\begin{cases} \Delta x_1 = S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{15+9}{2} \times 3 = 36m \\ \Delta x_2 = S'_{\text{ذوزنقه}} = \frac{15+9}{2} \times 2 = 24m \end{cases} \to \Delta y_{\text{کل}} = 36 + 24 = 60m$$
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{60}{12-7} \to v_{av} = 12\frac{m}{s}$$

۱۵ - گزینه ۴ می‌دانیم که در حرکت با شتاب ثابت، حرکت در بازه‌های زمانی برابر در طرفین رأس سهمی (نمودار مکان-زمان) متقارن است. درنتیجه در این حرکت متقارن جابه‌جایی صفر است و سرعت متوسط نیز صفر می‌باشد. در این صورت، اگر در لحظهٔ t_1 و t_2 به فاصلهٔ برابر از راس نمودار مکان-زمان باشند، سرعت متوسط صفر خواهد شد. بنابراین لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد (رأس نمودار) برابر است با:

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{12/5 + 5/5}{2} = 9s$$

معادلهٔ مکان-زمان به‌صورت $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ است و لحظهٔ تغییر جهت متحرک از رابطهٔ $t = \frac{v_0}{a}$ به‌دست می‌آید. تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: $(x = Ax^2 + Bx + C)$

گزینهٔ «۱»:

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{-B}{2A} = \frac{-13/5}{3} = -4/5s \times$$

گزینهٔ «۲»:

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{-B}{2A} = \frac{9}{2} = 4/5s \times$$

گزینهٔ «۳»:

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{-B}{2A} = \frac{8}{2} = -4/5s \times$$

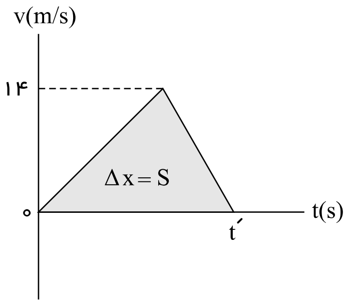
گزینهٔ «۴»:

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{-B}{2A} = \frac{9}{1} = 9s \checkmark$$

۱۶ - گزینه ۴ با استفاده از معادلهٔ سرعت جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت سرعت متحرک را در لحظهٔ عبور از مکان $x = 14m$ به‌دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \to \begin{cases} v_0 = 0 \,,\, a = 7\frac{m}{s^2} \\ \Delta x = 14m \end{cases} \to v^2 = 0 + 2 \times 7 \times 14 = 196 \to v = 14\frac{m}{s}$$

حال نمودار $(v-t)$ را رسم می‌کنیم:



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \begin{cases} \Delta x = S \rightarrow S = \dfrac{۱۴ \times t'}{۲} \\ \Delta t = t' \end{cases} \rightarrow v_{av} = \frac{\frac{۱۴t'}{۲}}{t'} = \frac{۱۴}{۲} = ۷\frac{m}{s}$$

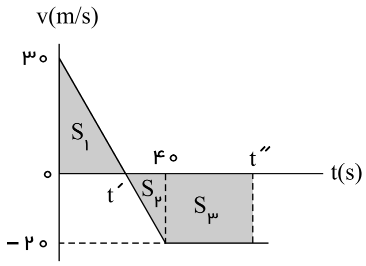
۱۷ - گزینه ۲ مساحت زیر نمودار $v-t$ برابر جابه‌جایی است. این مقدار را در بازهٔ t تا $۲۵s$ حساب می‌کنیم:

$$\Delta x = S_{v-t} \Rightarrow \Delta x_{(t \text{ تا } ۲۵s)} = \frac{۱}{۲} \times (۲۵ - t) \times ۱۰ = ۵(۲۵ - t)$$

حال بزرگی سرعت متوسط متحرک را محاسبه می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۲۵ - t]{\Delta x = ۵(۲۵ - t)} v_{av} = \frac{۵(۲۵ - t)}{۲۵ - t} = ۵\frac{m}{s}$$

۱۸ - گزینه ۲ از تشابه مثلث‌ها داریم:



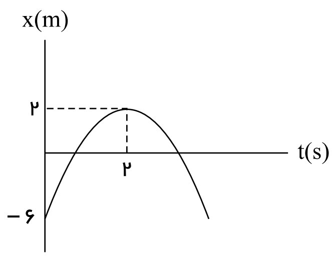
$$\frac{۳۰}{۲۰} = \frac{t'}{۴۰ - t'} \rightarrow ۱۲۰ - ۳t' = ۲t' + t' = ۲۴s$$

$$S_۱ = \frac{۳۰ \times ۲۴}{۲} = ۳۶۰ \rightarrow \Delta x_۱ = ۳۶۰m \rightarrow S_۲ = \frac{۲۰ \times ۱۶}{۲} = ۱۶۰m \rightarrow \Delta x_۲ = -۱۶۰m \rightarrow \Delta x_۱ + \Delta x_۲ + \Delta x_۳ = ۰ \rightarrow ۳۶۰ + (-۱۶۰) + \Delta x_۳ = ۰$$

$$\rightarrow \Delta x_۳ = -۲۰۰m \rightarrow S_۳ = ۲۰۰ \rightarrow ۲۰۰ = (t'' - ۴۰) \times ۲۰ \rightarrow t'' = ۵۰s$$

۱۹ - گزینه ۱ روش اول: باتوجه به نمودار، در لحظهٔ $t = ۲s$ شیب خط مماس بر نمودار یعنی سرعت، صفر است. تنها گزینه‌ای که به ازای $t = ۲s$، مقدار $v = ۰$ می‌شود که گزینه ۱ است

روش دوم:



می‌دانیم که در نقطهٔ ماکزیمم سهمی، شیب خط مماس بر نمودار، صفر است؛ بنابراین سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۲s$ برابر صفر است. هم‌چنین می‌دانیم حرکت در دو طرف نقطهٔ ماکزیمم، متقارن است، پس می‌توانیم بگوییم متحرک بین لحظه‌ای که از مبدأ می‌گذرد تا لحظهٔ $t = ۲s$ مسافت $۲m$ را طی می‌کند.

$$\Delta x_{(۰s \text{ تا } ۲s)} = \frac{v_۰ + v_۲}{۲} \times t$$

$$\xrightarrow[\Delta x = ۲ - (-۶) = ۸m]{v_۲ = ۰} ۸ = \frac{v_۰}{۲} \times ۲ \Rightarrow v_۰ = ۸\frac{m}{s}$$

حال در بازهٔ صفر تا $۲s$ از معادلهٔ سرعت-زمان استفاده کرده و شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$v_۲ = at + v_۰ \xrightarrow[t = ۲s]{v_۲ = ۰, v_۰ = ۸\frac{m}{s}} ۰ = ۲a + ۸ \Rightarrow a = -۴\frac{m}{s^۲}$$

در نتیجه معادلهٔ سرعت-زمان متحرک به این صورت خواهد بود.

$$v = -۴t + ۸$$

۲۰ - گزینه ۱ روش اول: با استفاده از معادلهٔ مکان-زمان در دو ثانیهٔ دوم $(t_۲ = ۴s, t_۱ = ۲s)$ شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_۴ - \Delta x_۲ = ۴۸ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}a \times (۴)^۲ + ۱۰ \times ۴\right) - \left(\frac{۱}{۲}a(۲)^۲ + ۱۰ \times ۲\right) = ۴۸ \Rightarrow ۶a + ۲۰ = ۴۸ \Rightarrow a = \frac{۱۴}{۳}\frac{m}{s^۲}$$

به همین طریق جابه‌جایی درسه ثانیهٔ سوم را حساب می کنیم $(t_۲ = ۹s, t_۱ = ۶s)$

$$\Delta x_۹ - \Delta x_۶ = \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱۴}{۳} \times (۹)^۲ + ۱۰ \times ۹\right) - \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱۴}{۳}(۶)^۲ + ۱۰ \times ۶\right) = ۲۷۹ - ۱۴۴ = ۱۳۵m$$

حال سرعت متوسط را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۳۵}{۳}=۴۵\frac{m}{s}$$

روش دوم: از رابطهٔ جابه‌جایی در t ثانیه‌ی nاُم استفاده می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^{۲}(۲n-۱)+v_{\circ}t$$

دو ثانیهٔ دوم : $۴۸=\frac{۱}{۲}a\times(۲)^{۲}(۲\times۲-۱)+۱۰\times۲\Rightarrow a=\frac{۱۴}{۳}\frac{m}{s^{۲}}$

سه ثانیهٔ سوم : $\Delta x=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۴}{۳}\times(۳)^{۲}(۲\times۳-۱)+۱۰\times۳\Rightarrow\Delta x=۱۳۵m\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۳۵}{۳}=۴۵\frac{m}{s}$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲
۲ - ۴
۳ - ۴
۴ - ۳
۵ - ۲
۶ - ۳
۷ - ۳
۸ - ۲
۹ - ۱
۱۰ - ۳
۱۱ - ۲
۱۲ - ۲
۱۳ - ۱
۱۴ - ۳
۱۵ - ۴
۱۶ - ۴
۱۷ - ۲
۱۸ - ۲
۱۹ - ۱
۲۰ - ۱